5. ANALITICKI HIJERARHIJSKI PROCES (AHP)

5.1. AHP kao DSS (alat) za donosenje odluka

Analiticki hijerarhijski proces (AHP) predstavlja jedan od najpoznatijih metoda naucne analize scenarija i donosenja odluka konzistentnim vrednovanjem hijerarhija cije elemente cine ciljevi, kriterijumi, podkriterijumi i alternative.

Po mnogim misljenjima AHP je sistem za podrsku odlucivanju, dakle DSS. Posto sadrzi korektan matematicki model i realizovan je kao uoblicen softver za PC platforme sa potpunom tehnickom podrskom – generalno ima dovoljno razloga da se, u racunarskoj verziji Expert Choice 2000, smatra komercijalnim DSS-om opste namene u oblasti visekriterijumskog odlucivanja. Reference proizvodjaca i pregled Interneta pokazuju da se AHP intenzivno koristi za odlucivanje u oblastima menadzmenta, upravljanja, alokacije i distribucije.

Idejnu i matematicku postavku AHP dao je Thomas Saaty (Saaty, 1980). Vlasnik licence za softversku realizaciju ovog DSS, u verzijama za pojedinacno i grupno donosenje odluka, jeste firma Expert Choice, Inc. iz Pitsburga u SAD. Sa ovom firmom je tokom 1999. godine uspostavljena saradnja, a ljubaznoscu firme softver je u dva maha dobijen u verzijama naucnih (neznatno limitiranih) edicija.

5.2. Metodoloski osnovi AHP

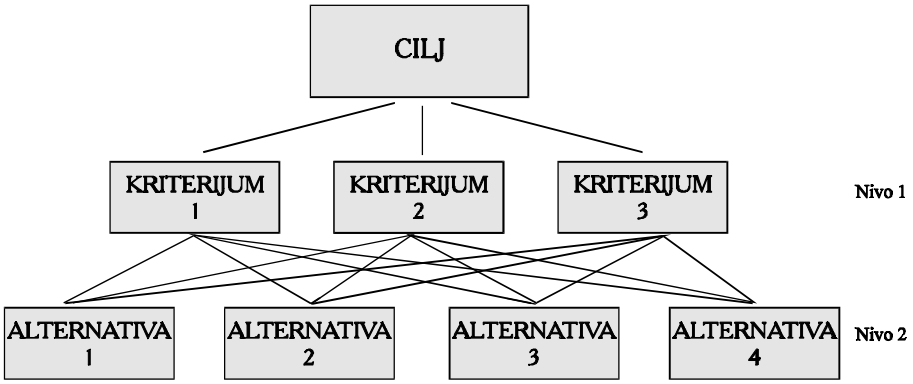
Analiticki hijerarhijski proces spada u klasu metoda za meku optimizaciju. U osnovi se radi o specificnom alatu za formiranje i analizu hijerarhija odlucivanja. AHP najpre omogucava interaktivno kreiranje hijerarhije problema kao pripremu scenarija odlucivanja, a zatim vrednovanje u parovima elemenata hijerarhije (ciljeva, kriterijuma i alternativa) u top-down smeru. Na kraju se vrsi sinteza svih vrednovanja i po strogo utvrdjenom matematickom modelu odredjuju tezinski koeficijenti svih elemenata hijerarhije. Zbir tezinskih koeficijenata elemenata na svakom nivou hijerahije jednak je 1 sto omogucava donosiocu odluka da rangira sve elemente u horizontalnom i vertikalnom smislu.

AHP omogucava interaktivnu analizu osetljivosti postupka vrednovanja na konacne rangove elemenata hijerarhije. Pored toga, tokom vrednovanja elemenata hijerarhije, sve do kraja procedure i sinteze rezultata, proverava se konzistentnost rezonovanja donosioca odluka i utvrdjuje ispravnost dobijenih rangova alternativa i kriterijuma, kao i njihovih tezinskih vrednosti.

Metodoloski posmatrano, AHP je visekriterijumska tehnika koja se zasniva na razlaganju slozenog problema u hijerarhiju. Cilj se nalazi na vrhu hijerarhije, dok su kriterijumi, podkriterijumi i alternative na nizim nivoima. Kao ilustracija, na slici 5 data je hijerarhija koju cine cilj, tri kriterijuma i cetiri alternative. Hijerarhija ne mora da bude kompletna; npr. element na nekom nivou ne mora da bude kriterijum za sve elemente u podnivou, tako da se hijerarhija moze podeliti na podhijerarhije kojima je zajednicki jedino element na vrhu hijerarhije.

Analiticki hijerarhijski proces je fleksibilan jer omogucava da se kod slozenih problema sa mnogo kriterijuma i alternativa relativno lako nadju relacije izmedju uticajnih faktora, prepozna njihov eksplicitni ili relativni uticaj i znacaj u realnim uslovima i odredi dominantnost jednog faktora u odnosu na drugi. Metod,

naime, anticipira cinjenicu da se i najslozeniji problem moze razloziti na hijerarhiju i to tako da su u dalju analizu ukljuceni i kvalitativni i kvantitativni aspekti problema. AHP drzi sve delove hijerarhije u vezi, tako da je jednostavno videti kako promena jednog faktora utice na ostale faktore.



Slika 5. Primer hijerarhije u AHP –u

AHP je do sada primenjivan raznim oblastima strateskog menadzmenta gde odluke imaju dalekosezan znacaj i gde donosioci odluka rado biraju kvalitetnog i pouzdanog savetnika u fazi razmatranja alternativa i utvrdjivanja njihovih efekata u odnosu na postavljene ciljeve. O znacajnosti naucnog fundamenta Analitickog hijerarhijskog procesa dovoljno svedoci cinjenica da je metod detaljno proucavan i unapredjivan putem mnogih doktorskih disertacija i naucnih radova na prestiznim svetskim univerzitetima. Nekoliko naucnih konferencija posveceno je samo AHP, sto dodatno potvrdjuje njegov kvalitet i aktuelnost.

5.3. Matematicki osnovi AHP

Hijerarhijski struktuiran model odlucivanja u opstem slucaju se sastoji od cilja, kriterijuma, nekoliko nivoa podkriterijuma i alternativa, slika 6. Cilj je na vrhu i on se ni sa jednim od drugih elemenata ne poredi. Na nivou 1 je n kriterijuma koji se u parovima, svako sa svakim, porede u odnosu na neposredno nadredjeni element na visem nivou; ovde je to cilj na nultom nivou. Potrebno je ukupno nx(n-1)/2 poredjenja sto znaci da, generalno govoreci, broj poredjenja priblizno odgovara kvadratu broja elemenata koji se porede. Isti postupak se primenjuje iduci kroz hijerarhiju prema dole, sve dok se na poslednjem nivou k ne izvrse poredjenja svih alternativa u odnosu na nadredjene pod-pod- ... –kriterijume na pretposlednjem k-1 nivou.

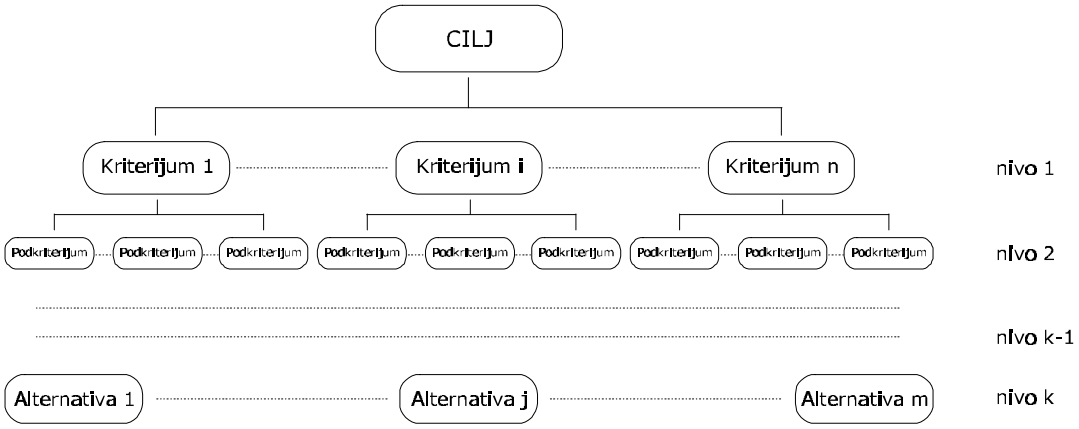
U radovima (Saaty, 1986; Alphonce, 1997; Harker & Vargas, 1987) definisani su aksiomi na kojima se AHP zasniva:

Aksiom reciprocnosti. Ako je element A n puta znacajniji od elementa B, tada je element B 1/n puta znacajniji od elementa A.

Aksiom homogenosti. Poredjenje ima smisla jedino ako su elementi uporedivi – npr. ne moze se porediti tezina komarca i tezina slona.

Aksiom zavisnosti. Dozvoljava se poredjenje medju grupom elemenata jednog nivoa u odnosu na element viseg nivoa, tj. poredjenja na nizem nivou zavise od elementa viseg nivoa.

Aksiom ocekivanja. Svaka promena u strukturi hijerarhije zahteva ponovno racunanje prioriteta u novoj hijerarhiji.



Slika 6. Opsti hijerarhijski model u AHP-u

Svako poredjenje dva elementa hijerarhije (modela) vrsi se koriscenjem Satijeve skale date u tabeli 2.

Tabela 2. Satijeva skala vrednovanja

$$S = \left\{ \frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \right\}.$$

Znacaj	Definicija	Objasnjenje
1	Istog znacaja	Dva elementa su identicnog znacaja u odnosu na cilj
3	Slaba dominantnost	Iskustvo ili rasudjivanje neznatno favorizuju jedan element u odnosu na drugi
5	Jaka dominantnost	Iskustvo ili rasudjivanje znatno favorizuju jedan element u odnosu na drugi
7	Demonstrirana dominantnost	Dominantnost jednog elementa potvrdjena u praksi
9	Apsolutna dominantnost	Dominantnost najviseg stepena
2,4,6,8	Medjuvrednosti	Potreban kompromis ili dalja podela

Rezultati poredjenja elemenata na datom nivou hijerarhije smestaju se u odgovarajuce matrice poredjenja. Npr., ako se medjusobno porede n elemenata u odnosu na odgovarajuci element na neposredno visem nivou hijerarhije, tada se pri poredjenju elementa i u odnosu na element j putem Satijeve skale odredjuje numericki koeficijent a_{ij} i smesta na odgovarajucu poziciju u matrici A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn} \end{bmatrix}. \qquad \text{... (1)}$$

Reciprocna vrednost rezultata poredjenja se smesta na poziciji a_{ji} da bi se ocuvala konzistentnost rasudjivanja. Na primer, ako je element 1 neznatno favorizovan u odnosu na element 2, na mestu a_{12} matrice A bio bi broj 3, a na mestu a_{21} bila bi reciprocna vrednost, 1/3.

Smisao matrice poredjenja najbolje se moze shvatiti iz sledecih razmatranja. U ‘savrsenom svetu’, sto je identicno perfektno konzistentnom vrednovanju, matrica A, u kojoj se smestaju rezultati poredjenja, bila bi ista kao matrica X:

$$X = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix} \qquad \text{... (2)}$$

gde w_i predstavlja relativni tezinski koeficijent elementa i.

Predlozene su razlicite metode da bi se iz matrice A ekstrahovale vrednosti vektora tezinskih koeficijenata $\mathbf{w}^T=\{w_1, ..., w_n\}$ koje bi bile bliske aproksimacije odgovarajucih elemenata matrice X. Autor AHP T. Saaty predlozio je da se za matricu A najpre odredi njena maksimalna sopstvena vrednost, l_{max}. Odgovarajuci vektor sopstvenih vrednosti matrice moze se zatim uzeti kao vektor pribliznih vrednosti tezinskih koeficijenata, $\mathbf{w}^T$, jer vazi:

$$\begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_n \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_n \end{bmatrix} \qquad \text{... (3)}$$

Vektor $\mathbf{w}$ moze se dobiti resavanjem sistema homogenih linearnih jednacina:

$$A\mathbf{w} = n\mathbf{w} \quad \text{ili} \quad (A-nI)\mathbf{w} = 0. \qquad \text{... (4)}$$

Sistem ima netrivijalno resenje ako i samo ako je n sopstvena vrednost matrice A, tj. ako je determinanta matrice (A-nI) jednaka nuli.

Sada matrica X ima rang 1, posto je svaki red matrice proizvod konstante i prvog reda matrice. Zbog toga su sve sopstvene vrednosti, sem jedne, jednake nuli. Suma sopstvenih vrednosti matrice jednaka je tragu matrice. U ovom slucaju trag matrice X jednak je n. Prema tome, n je sopstvena vrednost matrice A i sistem (4) ima netrivijalno resenje. Resenje se sastoji od pozitivnih elemenata u vektoru resenja i ono je jedinstveno u granicama date multiplikativne konstante (teorema Perron – Frobenius). Da bi se postiglo da **w** bude jedinstveno, njegovi elementi se normalizuju tako sto se podele sa njihovom sumom.

Druge tehnike za odredjivanje vektora tezinskih koeficijenata **w**, a koje takodje preporucuje Saaty (Saaty, 1992), ukljucuju sumiranje redova matrice rezultata poredjenja i normalizovanje dobijenih suma, jer je:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{w_i}{w_j} = w_i \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{w_j} \right) \qquad i = 1,\ldots,n \quad \text{(po redovima).} \qquad \ldots (5)$$

Vektor tezinskih koeficijenata **w** moze se dobiti i tako sto se reciprocne vrednosti suma kolona normalizuju:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{w_j} = \frac{1}{w_j} \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \right) \qquad j = 1,\ldots,n \quad \text{(po kolonama).} \qquad \ldots (6)$$

Odredjivanje **w** moze se vrsiti normalizacijom geometrijske sredine elemenata po redovima matrice; ovaj pristup se redje srece u praksi.

Kada se na neki od navedenih nacina odredi, vektor tezinskih koeficijenata **w** se zatim mnozi sa tezinskim koeficijentom elementa sa viseg nivoa koji je koriscen kao kriterijum pri poredjenju.

Procedura se ponavlja iduci ka nizim nivoima hijerarhije. Tezinski koeficijenti se racunaju za svaki element na datom nivou i isti se zatim koriste za odredjivanje tzv. kompozitnih relativnih tezinskih koeficijenata elemenata u nizim nivoima.

Posto se postupak sprovede do poslednjeg nivoa na kome su alternative, na kraju se odredjuju kompozitni tezinski koeficijenti svih alternativa. Zbir ovih keoficijenata je 1, a donosilac odluke raspolaze sa dve kljucne informacije: (1) poznat je relativan znacaj svake alternative u odnosu na cilj na vrhu hijerarhije (ocena znacajnosti) i (2) utvrdjen je redosled alternativa po znacaju (rangiranje).

5.4. Konzistentnost

AHP spada u popularne metode i zato sto ima sposobnost da identifikuje i analizira nekonzistentnosti donosioca odluka u procesu rasudjivanja i vrednovanja elemenata hijerarhije. Covek je, naime, retko konzistentan pri procenjivanju vrednosti ili odnosa kvalitativnih elemenata u hijerarhiji. AHP na odredjen nacin ublazava ovaj problem tako sto odmerava stepen nekonzistentnosti i o tome obavestava donosioca odluka.

Kako se u AHP tretira konzistentnost sledi iz sledecih razmatranja.

Kada bi postojala mogucnost da se precizno odrede vrednosti tezinskih koeficijenata svih elemenata koji se medjusobno porede na datom nivou hijerarhije, sopstvene vrednosti matrice (1) bile bi potpuno konzistentne. Medjutim, ako se npr. tvrdi da je A mnogo veceg znacaja od B, B nesto veceg znacaja od C, i C nesto veceg znacaja od A, nastaje nekonzistentnost u resavanju problema i smanjuje se pouzdanost rezultata. Opsti je stav da redundantnost poredjenja u parovima cini AHP metodom koji nije previse osetljiv na greske u rasudjivanju. On takodje daje mogucnost da se mere greske u rasudjivanju tako sto se proracunava indeks konzistentnosti za dobijenu matricu poredjenja, a zatim sracunava i stepen konzistentnosti.

Da bi se izracunao stepen konzistentnosti (CR), prvo treba izracunati indeks konzistentnosti (CI) prema relaciji

$$CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1} \qquad \ldots (7)$$

gde je λ_{max} maksimalna sopstvena vrednost matrice poredjenja. Sto je λ_{max} blize broju n, manja ce biti nekonzistentnost.

Da bi se izracunalo λ_{max}, prvo treba pomnoziti matricu poredjenja sa vektorom tezinskih koeficijenata da bi se odredio vektor **b**:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ . \\ . \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix} \qquad \text{... (8)}$$

Deljenjem korespodentnih elemenata vektora **b** i **w** dobija se:

$$\begin{bmatrix} \frac{b_1}{w_1} \\ \frac{b_2}{w_2} \\ . \\ . \\ \frac{b_n}{w_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ . \\ . \\ \lambda_n \end{bmatrix} \qquad \text{... (9)}$$

a konacno je

$$\lambda_{max} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ . \qquad \text{... (10)}$$

Zamenom vrednosti λ_{max} iz relacije (10) u relaciju (7) odredjuje se indeks konzistentnosti (CI). Konacno, stepen konzistentnosti (CR) predstavlja odnos indeksa konzistentnosti (CI) i slucajnog indeksa (RI):

$$CR = \frac{CI}{RI} \cdot \qquad \text{... (11)}$$

Slucajni indeks (RI) zavisi od reda matrice, a preuzima se iz tabele 3 u kojoj prvi red predstavlja red matrice poredjenja, a drugi slucajne indekse (Detalji o nacinu generisanja slucajnih indeksa dati su u (Saaty, 1980)).

Tabela 3. Slucajni indeksi (Saaty, 1980)

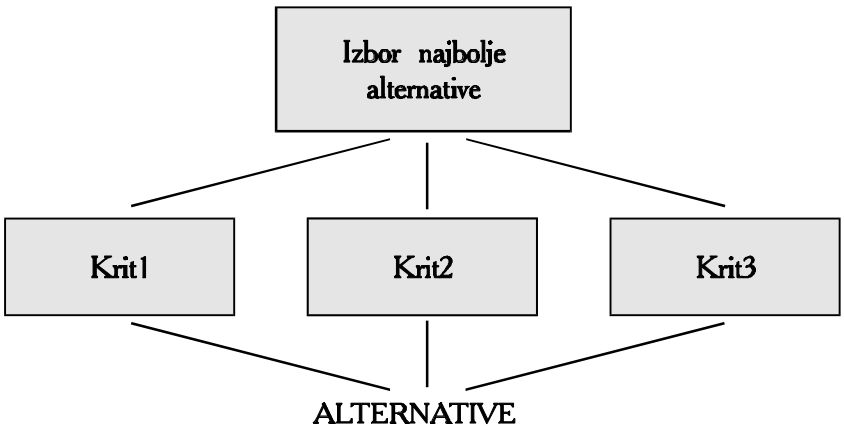
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
0.0	0.0	0.58	0.9	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51	1.48	1.56	1.57	1.59

Ako je stepen konzistentnosti (CR) manji od 0,10, rezultat je dovoljno tacan i nema potrebe za korekcijama u poredjenjima i ponavljanju proracuna. Ako je stepen konzistentosti veci od 0,10, rezultate bi trebalo ponovo analizirati i ustanoviti razloge nekonzistentnosti, ukloniti ih delimicnim ponavljanjem poredjenja u parovima, a ako ponavljanje procedure u nekoliko koraka ne dovede do snizenja stepena konzistentnosti do tolerantnog limita 0,10, sve rezultate treba odbaciti i ponoviti ceo postupak od pocetka.

Treba, medjutim, napomenuti da se u praksi cesto desava da stepen konzistentnosti bude veci od 0,10, a da se izabrana alternativa ipak zadrzi kao najbolja (Karlsson, 1998).

5.5. Primer

Za izbor najbolje alternative postavljena su tri kriterijuma: Krit1, Krit2 i Krit3. U primeru ce se izvrsiti vrednovanje kriterijuma u odnosu na cilj, bez odredjivanja tezinskih koeficijenata alternativa u odnosu na kriterijume.



Slika 7. Hijerarhijska struktura problema.

Na slici 7 prikazana je hijerarhija formirana na osnovu gornje delimicne formulacije problema (treba uociti da problem nije kompletan jer nedostaju alternative).

Korak 1. Postaviti n kriterijuma u redove i kolone matrice nxn

Nacrtati raster matrice reda n i sa leve i gornje strane upisati nazive kriterijuma. Raster u ovom slucaju odgovara matrici 3×3.

Korak 2. Porediti kriterijume u odnosu na cilj

Pri poredjenju se koristi Satijeva skala iz tabele 2. Posmatrajuci definisani cilj, za svaki par kriterijuma (pocevsi od Krit1 i Krit2, npr.) treba uneti vrednost znacaja jednog kriterijuma u odnosu na drugi na poziciju (Krit1, Krit2) u matrici rezultata poredjenja. Tako je ovde na poziciji preseka reda Krit1 i kolone Krit2 upisana vrednost 2; prema ranijoj argumentaciji na poziciji (Krit2, Krit1) unosi se reciprocna vrednost 1/2. Zatim se nastavlja sa poredjenjem ostalih kriterijuma: Krit1 – Krit3 i Krit2 – Krit3. Matrica poredjenja kriterijuma u odnosu na cilj mogla bi da izgleda ovako:

	Krit1	**Krit2**	**Krit3**
Krit1	1	2	5
Krit2	1/2	1	3
Krit3	1/5	1/3	1

U ovom primeru potrebna su 3 poredjenja. Treba primetiti da je u opstem slucaju broj poredjenja jednak n x (n-1)/2, odnosno da odgovara broju kombinacija n elemenata druge klase bez ponavljanja. Takodje treba uociti da je na glavnoj dijagonali svuda upisana vrednost 1.

Korak 3. Odrediti vektor sopstvenih vrednosti matrice poredjenja

Postoji jednostavan metod za dobijanje sopstvenih vrednosti matrice. Prvo se u svakoj koloni sumiraju svi njeni elementi, a zatim se svaki element matrice podeli sa dobijenom sumom za kolonu u kojoj se taj element nalazi. Na primer, za element prvog reda prve kolone dobija se 1/(1+1/2+1/5) = 1/1,7 = 0,59. Zatim se sumiraju tako dobijene vrednosti po redovima kao u donjoj tabeli.

	Krit1	**Krit2**	**Krit3**	Suma
Krit1	0,59	0,60	0,56	1,75
Krit2	0,29	0,30	0,33	0,92
Krit3	0,12	0,10	0,11	0,33

Normalizovanje sume redova vrsi se tako sto se suma svakog reda deli sa brojem redova. Rezultat ovih izracunavanja je vektor prioriteta koji predstavlja vektor sopstvenih vrednosti matrice.

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1{,}75\\0{,}92\\0{,}33\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}58\\0{,}31\\0{,}11\end{bmatrix}.$$

Korak 4. Dodeliti tezinske vrednosti kriterijumima na osnovu izracunatog vektora sopstvenih vrednosti

Na osnovu rezultata prethodnog koraka svaki kriterijum dobija odgovarajuci tezinski koeficijent kojim se definise njegova relativna vrednost u odnosu na cilj. Ovde su to:

$w_1 = 0{,}58$ (Krit1), $w_2 = 0{,}31$ (Krit2) i $w_3 = 0{,}11$ (Krit3).

Korak 5. Ispitati konzistentnost rezultata

Da bi se izracunalo l_{max} prema relaciji (8) treba pomnoziti matricu u kojoj se nalaze rezultati poredjenja sa vektorom prioriteta:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\1/2 & 1 & 3\\1/5 & 1/3 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0{,}58\\0{,}31\\0{,}11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1{,}75\\0{,}93\\0{,}33\end{bmatrix}$$

a zatim, prema (9), podeliti prvi element izracunatog vektora sa prvim elementom vektora prioriteta, drugi element sa drugim, itd:

$$\begin{bmatrix}\frac{1{,}75}{0{,}58}\\\frac{0{,}93}{0{,}31}\\\frac{0{,}33}{0{,}11}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3{,}02\\3\\3\end{bmatrix}.$$

Prema (10) se odredjuje l_{max}:

$$l_{max}=\frac{3{,}02+3+3}{3}=3{,}006$$

a zatim se pomocu (7) izracunava indeks konzistentnosti:

$$CI = \frac{l_{max} - n}{n-1} = \frac{3{,}006 - 3}{3-1} = 0{,}003 .$$

Na kraju se izracunava stepen konzistentnosti (CR) koriscenjem relacije (11):

$$CR = \frac{CI}{RI} = \frac{0{,}003}{0{,}58} = 0{,}005$$ (Prema tabeli 3, slucajni indeks za matricu 3×3 je 0,58.)

Stepen konzistentnosti ovde zadovoljava jer je manji od 0,10. Da je bio veci, bila bi potrebna nova evaluacija znacaja kriterijuma, odnosno trebalo bi se vratiti na Korak 2 i ponoviti sledece korake za novu matricu prioriteta.